Def : Una FUNZIONE $f: A \to B$ è una legge che ad ogni elemento di A associa uno ed un solo elemento di B $\qquad y = f(x)$

$A \subseteq$ è il Dominio di definizione di f
$B \subseteq$ è il Codominio di f o Immagine di f

x é la variabile indipendente
y è la variabile dipendente
è lo spazio su cui é definita la variabile x.

Campo di esistenza di f (C.E.) è :
i) un sottoinsieme di ,
ii) l'insieme dove è possibile effettuare le operazioni algebriche presenti nell'espressione algebrica della funzione.

Dominio di definizione di f (D_f) è:
i) sottoinsieme del campo di esistenza di f (C.E.),
ii) l'insieme dove si scelgono i valori da attribuire alle variabili (dipende dal significato delle variabili).

$$D_f \subseteq C.E. \subseteq$$

OPERAZIONI tra FUNZIONI

Date $f: A \to \;\square$ e $g: B \to \;\square$
Se $x_0 \in A \cap B$ allora è possibile calcolare $f(x_0)$ e $g(x_0)$ e definire le seguenti operazioni

SOMMA
$(f + g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) \quad \forall x_0 \in A \cap B$

DIFFERENZA
$(f - g)(x_0) = f(x_0) - g(x_0) \quad \forall x_0 \in A \cap B$

PRODOTTO
$(f \cdot g)(x_0) = f(x_0) \cdot g(x_0) \quad \forall x_0 \in A \cap B$

QUOZIENTE

$(f \backslash g)(x_0) = f(x_0) \backslash g(x_0)$

$\square\ x_0\ \square\ D = \{x \square A \square B :\ g(x) \neq 0\}$

Date $f: A\ \square\ \ \square$ e $g: B\ \square\ \ \square$

PRODOTTO di COMPOSIZIONE

$(g \circ f)(x_0) = g(f(x_0))\quad \square\ x_0\ \square\ A$ e $f(x_0) \square B$

Campo di esistenza della funzioni elementari

i) $f(x) = k$, $k\square$ $\quad \square\ x\ \square$

ii) $f(x) = x$ $\quad \square\ x\ \square$

iii) $f(x) = |x|$ $\quad \square\ x\ \square$

iv) $f(x) = x^n$ $\quad n\square\square$ $\quad \square\ x\ \square$

v) $f(x) = \sqrt[n]{x}$ $\quad n\square\square$ pari $\quad \square x \geq 0$

vi) $f(x) = \sqrt[n]{x}$ $\quad n\square\square$ dispari $\quad \square\ x\ \square$

vii) $f(x) = \log_a(x)$ $\quad a>1$ $\quad \square x > 0$

viii) $f(x) = a^x$ $\quad \square x\ \square$

ix) $f(x) = \square x\ \square$ $\quad \square x\ \square$

Per calcolare il campo di esistenza di una funzione si pone:
- i denominatori $\neq 0$
- gli argomenti delle radici n-esime con n pari ≥ 0,
- gli argomenti dei logaritmi > 0.

GRAFICO di una FUNZIONE

Data $f: A \to \mathbb{R}$ si definisce grafico di f l'insieme delle coppie ordinate $G_f = \{ (x, f(x)) : x \in A\}$

$(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ quindi $G_f \subseteq \mathbb{R}^2$

$C_f = \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in A\}$ (Codomio o Immagine di f, definita su A)

$f: A \to C_f$

Definizione di Limite:

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione per A

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$$

$\forall U_L \; \exists V_{x_0} : \forall x \neq x_0$ e $x \in V_{x_0} \cap A \Rightarrow f(x) \in U_L$

$U_L = \{y \in \mathbb{R} : \text{dist}(y, L) < \varepsilon\} = \{y \in \mathbb{R} : | y - L | < \varepsilon\}$

$V_{x_0} = \{x \in \mathbb{R} : \text{dist}(x, x_0) < \delta_\varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : | x - x_0 | < \delta_\varepsilon\}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \neq x_0, \; x \in A$ e $|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow | f(x) - L | < \varepsilon$

Limite destro: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_1 \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \neq x_0, \; x \in A$ e $x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon \Rightarrow | f(x) - L_1 | < \varepsilon$

Limite sinistro: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_2 \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \neq x_0, \; x \in A$ e $x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 \Rightarrow | f(x) - L_2 | < \varepsilon$

Se $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_2$ e $L_1 = L_2$

$\Rightarrow \; \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 = L_2$

Definizione di Intorno di $+\infty$:

$$I_{+\infty} = \{x \in \mathbb{R} : x > M\}, \quad M>0$$

Definizione di Intorno di $-\infty$:

$$I_{+\infty} = \{x \in \mathbb{R} : x < -N\}, \quad N>0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff$$

$\forall U_L \ \exists V_{x_0} : \forall x \neq x_0$ e $x \in V_{x_0} \cap A \Rightarrow f(x) \in U_L$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \iff$$

$\forall U_L \ \exists V_{+\infty} : \forall x \in V_{+\infty} \cap A \Rightarrow f(x) \in U_L$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon > 0 : \forall x \in A, x > M_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff$$

$\forall U_{+\infty} \ \exists V_{x_0} : \forall x \neq x_0$ e $x \in V_{x_0} \cap A \Rightarrow f(x) \in U_{+\infty}$

$\iff \forall M > 0 \ \exists \delta_M > 0 : \forall x \neq x_0, x \in A$ e $|x - x_0| < \delta_M \Rightarrow f(x) > M$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff$$

$\forall U_{-\infty} \ \exists V_{x_0} : \forall x \neq x_0$ e $x \in V_{x_0} \cap A \Rightarrow f(x) \in U_{-\infty}$

$\iff \forall N > 0 \ \exists \delta_N > 0 : \forall x \neq x_0, x \in A$ e $|x - x_0| < \delta_N \Rightarrow f(x) < -N$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff$$

$\forall U_{-\infty} \ \exists V_{+\infty} : \forall x \in V_{+\infty} \cap A \Rightarrow f(x) \in U_{-\infty}$

$\iff \forall N > 0 \ \exists M_N > 0 : \forall x \in A, x > M_N \Rightarrow f(x) < -N$

TEOREMA dell'Unicità del Limite

Sia f: $A \to \mathbb{R}$. Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 \Rightarrow$ tale limite è unico.

TEOREMA della PERMANENZA del SEGNO

Sia f: $A \to \mathbb{R}$. Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0 \Rightarrow$

$\exists\, I_{x_0}$: f(x) assume lo stesso segno di L $\forall x \neq x_0,\ x \in I_{x_0} \cap A$.

Corollario: Sia f: $A \to \mathbb{R}$. Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L$ e $\exists\, I_{x_0} : f(x) > 0$ $[<0]$ $\forall x \in I_{x_0} \cap A,\ x \neq x_0 \Rightarrow L \geq 0\ [\leq 0]$.

Siano f: $A \to \mathbb{R}$ e g: $A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$.

TEOREMA della somma, prodotto e quoziente tra LIMITI

Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \left[f(x) + g(x)\right] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = L_1 + L_2$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x)\right] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = L_1 \cdot L_2$$

se $\exists L_2 \neq 0$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} f(x) / \lim_{x \to x_0} g(x) = \frac{L_1}{L_2}$$

Siano f: $I \to \mathbb{R}$ e g: $A \to \mathbb{R}$,

TEOREMA del prodotto di composizione tra limiti

Se $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$ e $f(L_2)$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right) = f(L_2)$$